分科測驗（114 學年度起適用）

數學乙考科參考試卷（卷二）

試題解析

第壹部分、選擇（填）題

試題編號：1

參考答案：(3)

學科內容：N-12 乙-2 無窮等比級數

測驗目標：循環小數與無窮等比級數的概念

試題解析：由 $0.\overline{2}=\dfrac{2}{9}$ 、 $0.0\overline{4}=\dfrac{4}{90}$ ，因此數列的公比為 $\dfrac{\frac{4}{90}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{5}$ ，級數和為 $\dfrac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{18}$ 。

試題編號：2

參考答案：(2)

學科內容：F-12 乙-5 積分

測驗目標：積分的意涵

試題解析： $\displaystyle\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx=\left(\frac{1}{9}x^3+x\right)\Big|_{-3}^{3}=12$ 。

試題編號：3

參考答案：(5)

學科內容：D-11B-2 不確定性（D-11A-2 條件機率、D-11A-3 貝氏定理）

測驗目標：條件機率

試題解析：選項(1)：編號為奇數的球共有 50 顆，故在某甲抽到球的號碼是奇數的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\dfrac{1}{50}$ 。

選項(2)：編號為質數的球共有 25 顆，故在某甲抽到球的號碼是質數的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\dfrac{1}{25}$ 。

選項(3)：編號為 7 的倍數的球共有 14 顆，故在某甲抽到球的號碼是 7 的倍數的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\dfrac{1}{14}$ 。

選項(4)：編號不是 5 的倍數的球共有 80 顆，故在某甲抽到球的號碼不是 5 的倍數的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\frac{1}{80}$ 。

選項(5)：編號小於 10 的球共有 9 顆，故在某甲抽到球的號碼小於 10 的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率為 $\frac{1}{9}$ 。

由此可知，機率最大為 $\frac{1}{9}$ 。

試題編號：4

參考答案：(4)

學科內容：D-10-2 數據分析

測驗目標：散布圖與相關係數的關係

試題解析：由試題本所附相關係數公式知：

「若散布圖恰為正斜率直線時，此時相關係數最大（此時相關係數為 1）」，故答案為(4)。

試題編號：5

參考答案：(3)

學科內容：S-11B-1(S-11A-1) 空間概念、G-11B-4(G-11A-2) 空間坐標系

測驗目標：空間概念、空間坐標

試題解析：根據題意，知四角錐 A-$BCDE$ 的底面為在 xz 平面上，邊長為 6 的正方形，且四個側面為全等的等腰三角形，故四角錐頂點到底面的投影點為底面正方形的中心，推得錐頂點 A 的 x 坐標為 3、z 坐標為 3。由四角錐 A-$BCDE$ 體積 $72=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高，底面積為 $6\times6=36$，可算出高為 $\frac{72\times3}{36}=6$ 。因為錐頂點 A 在第一卦限，故錐頂點 A 的坐標為 $(3,6,3)$ 。

試題編號：6

參考答案：(5)

學科內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：有系統的計數

試題解析：根據題意，五天中每一種餐點至少各點一次，故五天中四種餐點必有一種會點兩次，假設五天中點兩次牛肉麵，可能情形為星期一、三；星期一、四；星期一、五；星期二、四；星期二、五；星期三、五點牛肉麵。

以上共 $6\times3!=36$ 種方法，則四種餐點共有 $36\times4=144$ 種方法。

試題編號：7

參考答案：(3)(5)

學科內容：N-10-3 指數、N-10-4 常用對數、

F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：指數、常用對數的意義、對數律、換底公式

試題解析：根據題意，可推得 $a=10^{1.1}$ 、 $b=10^{2.2}$ 、 $c=10^{3.3}$ 。

選項(1)： $a+c=10^{1.1}+10^{3.3}=10^{1.1}(1+10^{2.2})>2\times10^{2.2}=2b$ 。

選項(2)： $a=10^{1.1}>10^{1}=10$ 。

選項(3)：由 $\log1000=3$ 、 $\log2000=\log1000+\log2=3+\log2\approx3.3010$ ，知 $\log1000<\log c<\log2000$ ，推得 $1000<c<2000$ 。

選項(4)：由 $\log10=1$ ，知 $\log20=\log10+\log2\approx1.3010$ 。由 $\log10<\log a<\log20$ ，推得 $10<a<20$ ；由 $\log100=2$ ，知 $\log100<\log b$ ，得 $100<b$ 。

故 $b>2a$ 。

選項(5)：【解法一】

$\log_2 a+\log_2 c=\log_2 ac=\log_2(10^{1.1}\times10^{3.3})=\log_2 10^{4.4}$ ，

$\log_2 10^{4.4}=2\log_2 10^{2.2}=2\log_2 b$ ，

由此可知 $\log_2 a$ 、 $\log_2 b$ 、 $\log_2 c$ 依序成等差數列。

【解法二】

由 $\log_2 a=\dfrac{\log a}{\log 2}=\dfrac{1.1}{\log 2}$ 、 $\log_2 b=\dfrac{\log b}{\log 2}=\dfrac{2.2}{\log 2}$ 、 $\log_2 c=\dfrac{\log c}{\log 2}=\dfrac{3.3}{\log 2}$ ，

推得 $\log_2 a+\log_2 c=2\log_2 b$ ，故 $\log_2 a$ 、 $\log_2 b$ 、 $\log_2 c$ 依序成等差數列。

試題編號：8

參考答案：(1)(2)(5)

學科內容：N-12 乙-1 複數、A-12 乙-2 方程式的虛根

測驗目標：複數運算、複數平面、實係數方程式虛根成對

試題解析：根據題意 $z_2=z_1\cdot i$ ，即 $\sqrt{3}+bi=(1+ai)\cdot i=-a+i$ 。由兩相等複數有相同實部及虛部，推得 $a=-\sqrt{3}$ 、 $b=1$，即 $z_1=1-\sqrt{3}i$ 、 $z_2=\sqrt{3}+i$ 。

選項(1)： $a+b=-\sqrt{3}+1<0$ 。

選項(2)： $|z_1|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ 。

選項(3)： $z_1+z_2=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$ ，

則 $|z_1+z_2|=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})}=2\sqrt{2}$ ，

$|z_1|+|z_2|=2+2=4$ ，因此 $|z_1+z_2|\neq|z_1|+|z_2|$ 。

選項(4)：由實係數方程式虛根成對，知$1+\sqrt{3}i$也為實係數方程式x^2-2x+k的一根，推得$x^2-2x+k=(x-(1+\sqrt{3}i))(x-(1-\sqrt{3}i))$，$k=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=4$。此選項也可將$z_1=1-\sqrt{3}i$代入得$\left(1-\sqrt{3}i\right)^2-2\left(1-\sqrt{3}i\right)+k=0$，推得$k=4$。

選項(5)：$\left|z_2-z_1\right|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(1+\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})}=2\sqrt{2}$，

故以z_1、z_2、原點O三點為頂點的三角形邊長為 2、2、$2\sqrt{2}$。推得其為直角三角形，面積為$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$。

試題編號：9

參考答案：(1)(2)

學科內容：A-10-2 多項式之除法原理、F-12 乙-2 函數的極限、F-12 乙-3 微分、F-12 乙-5 積分

測驗目標：極限的運算性質、導數的定義、微積分基本定理

試題解析：選項(1)：由題意$f(x)$是多項式函數，知$f(x)$為連續函數。

故$f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\cdot(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=6\cdot 0=0$。

選項(2)：因為$f(2)=0$，推得$f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=6$。

選項(3)：將$x=0$代入得$f(0)=0-8+\int_0^0 g(t)dt=-8$。

選項(4)：$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{f(x)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}\times\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$。

選項(5)：利用微積分基本定理，推得$f'(x)=3x^2+\frac{d}{dx}\int_0^x g(t)dt=3x^2+g(x)$。因為$f'(2)=6$，推得$g(2)=f'(2)-3\times 2^2=-6$。

試題編號：10

參考答案：-3

學科內容：A-11B-1 矩陣與資料表格（A-11A-1 二元一次方程組的矩陣表達、A-11A-3 矩陣的運算）

測驗目標：矩陣運算、反方陣

試題解析：$\begin{bmatrix}1&-4\\0&2\end{bmatrix}$的反方陣$\begin{bmatrix}1&-4\\0&2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&4\\0&1\end{bmatrix}$，

則$\begin{bmatrix}1&-4\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-4\\0&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-24\\0&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-10\\0&6\end{bmatrix}$，推得$a+b+c+d=-3$。

試題編號：11

參考答案：5.8

學科內容：F-10-1 一次與二次函數、F-12 乙-4 導函數、F-12 乙-5 積分

測驗目標：導數的邊際意涵、函數極值、一次函數的反導函數與定積分

試題解析：邊際利潤 $F'(x)=200-0.4x$ ，得反導函數 $F(x)=-0.2x^2+200x+c$ ，其中 c 為一常數。已知銷售 200 個公仔的利潤為 4 萬元，代入 $F(x)$ 得 $40000=200\times200-0.2(200^2)+c$ ，推得 $c=8000$，故 $F(x)=-0.2x^2+200x+8000$。由 $F'(x)=200-0.4x=0$，故當 $x=500$ 時，$F(x)$ 有最大值 58000，即最大利潤為 5.8 萬元。此題也可利用配方法求出最大利潤。

試題編號：12

參考答案：$\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$

學科內容：G-10-5 廣義角和極坐標、G-10-7 三角比的性質

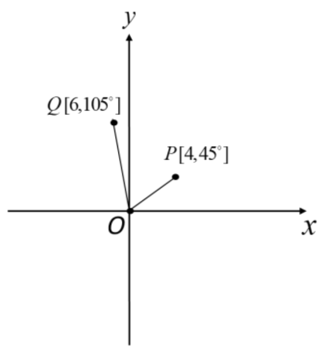
測驗目標：極坐標的定義、餘弦定理、三角形的面積

試題解析：由極坐標定義可知 $\overline{OP}=4$ 、 $\overline{OQ}=6$ ， $\angle POQ=105°-45°=60°$ （如圖所示）

由餘弦定理 $\overline{PQ}^2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos60°$ ，得 $\overline{PQ}=2\sqrt{7}$ 。

利用面積公式，三角形 POQ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin\angle POQ=\dfrac{1}{2}\times4\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ 。

由 O 到直線 PQ 的距離為三角形 POQ 在 PQ 邊上的高，即 O 到直線 PQ 的距離 $=\dfrac{6\sqrt{3}\times2}{2\sqrt{7}}=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$ 。



第貳部分、混合題或非選擇題

13-15 題為題組

試題編號：13

參考答案：(5)

學科內容：G-11B-2（G-11A-6） 平面向量的運算

測驗目標：平面向量的內積

試題解析： $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(-4,-3)\cdot(-6,-8)=24+24=48$ 。

試題編號：14

參考答案：$(\dfrac{103}{25},\dfrac{79}{25})$

學科內容：G-11B-2（G-11A-6） 平面向量的運算

測驗目標：平面向量的正射影

試題解析：$\overrightarrow{OQ}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\overrightarrow{AB}=(3,4)$ ，$\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影為

$$\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\overrightarrow{AB}=\frac{(-4,-3)\cdot(-6,-8)}{100}(-6,-8)=\frac{48}{100}(-6,-8)=(\frac{-72}{25},\frac{-96}{25})$$ 。

又 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ}$ ，可得 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的正射影 $\overrightarrow{AC}$ 為

$$\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2}\overrightarrow{AB}=(\frac{-72}{25},\frac{-96}{25})+(3,4)=(\frac{3}{25},\frac{4}{25})$$

已知點 A 的坐標為 $(4,3)$ ，故點 C 的坐標為 $(\frac{103}{25},\frac{79}{25})$ 。

試題編號：15

參考答案：$a=\frac{3}{5}$、$b=\frac{2}{5},P(8,-1)$

學科內容：G-11B-1（G-11A-1） 平面向量

測驗目標：平面向量的線性組合

試題解析：以下提供兩個解法說明 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{2}{3}$ ：

【解法一】

利用面積比等於同高的底邊長之比，得 $\dfrac{\Delta OAD}{\Delta PAD}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{PD}}=\dfrac{\Delta OBD}{\Delta PBD}$ ，令 $\dfrac{\Delta OBD}{\Delta PBD}=k$ 。

因此 $\Delta OAD=\dfrac{k}{k+1}\cdot\Delta OAP=\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{2}{3}\Delta OBP=\dfrac{2}{3}\Delta OBD$ ；故 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\Delta OAD}{\Delta OBD}=\dfrac{2}{3}$ 。

【解法二】

作 $\overline{AE}$ 垂直 $\overline{OP}$ 於點 E ，且 $\overline{BF}$ 垂直 $\overline{OP}$ 於點 F，則 ΔAED 與 ΔBFD 相似，故

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{AE}}{\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{BF}}=\frac{\Delta OAP}{\Delta OBP}=\frac{2}{3}$$ 。

由此可取 $a=\frac{3}{5}$ 、$b=\frac{2}{5}$ ，使得 $\overrightarrow{OD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}(4,3)+\frac{2}{5}(-2,-5)=\frac{1}{5}(8,-1)$ 。

設 $\overrightarrow{OP}=t(8,-1)$ ，再由 $\overline{OP}=\sqrt{65}$ ，可知 $t=1$ ，故點 P 的坐標為 $(8,-1)$ 。

16-18 題為題組

試題編號：16

參考答案：$a=11$、 $b=12$

學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：根據題意，求得線性規劃問題的最佳解

試題解析：根據題意知車商售出一台甲車得淨利潤 11 萬元、售出一台乙車得淨利潤 12 萬元，故售出甲車 x 台、乙車 y 台時，車商可得淨利潤為 $11x+12y$（萬元）。

試題編號：17

參考答案：$\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ x \le 20 \\ y \le 30 \\ 5x+6y \le 220 \end{cases}$

學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：根據題意，求得線性規劃問題的最佳解

試題解析：根據題意，由甲廠牌汽車每台成本 100 萬元，進口上限 20 台；乙廠牌汽車每台成本 120 萬元，進口上限 30 台，及車商準備 4400 萬元作為汽車進口成本，可列出不等式並化簡得 $\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0 \\ x \le 20 \\ y \le 30 \\ 5x+6y \le 220 \end{cases}$。

試題編號：18

參考答案：甲廠牌汽車 20 台、乙廠牌汽車 20 台，最大淨利潤 460（萬元）

學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：根據題意，求得線性規劃問題的最佳解

試題解析：依據題意，目標函數 $P(x,y)=11x+12y$ ，求解聯立方程式可得出可行解區域的頂點坐標 $(0,0)$ 、$(0,30)$、$(8,30)$、$(20,20)$ 、$(20,0)$。

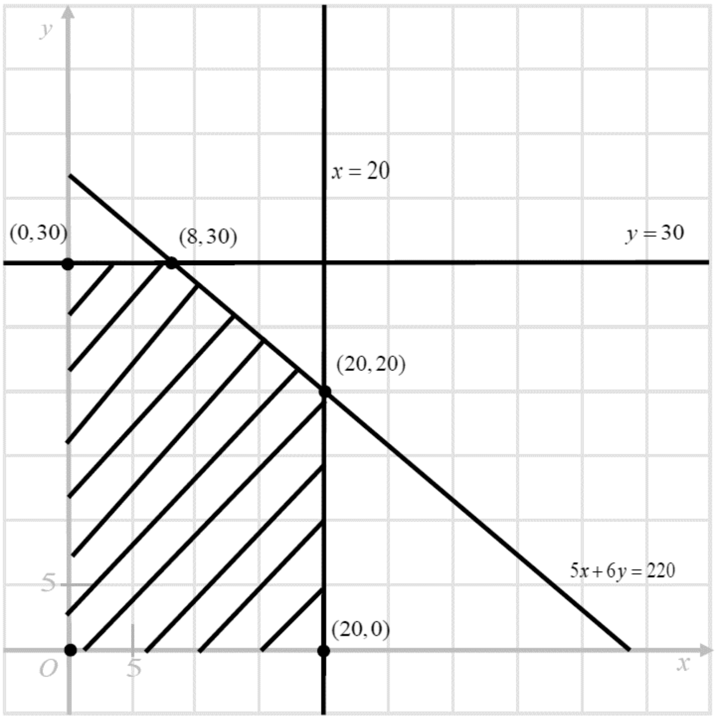
以下提供兩個解法求出最大利潤：

【解法一】頂點法

將可行解區域的頂點坐標代入目標函數

(x,y)	(0,0)	(0,30)	(8,30)	(20,20)	(20,0)
$P(x,y)=11x+12y$	0	360	448	460	220

可知當進口甲廠牌汽車 20 台，乙廠牌汽車 20 台時，可獲得最大淨利潤 460（萬元）。



【解法二】平行線法

設 $P(x,y)=11x+12y=k$ ， $k\geq 0$ ，則 $11x+12y=k$ 的斜率為 $-\dfrac{11}{12}$ ，

直線方程式 $5x+6y=220$ 的斜率為 $-\dfrac{5}{6}>-\dfrac{11}{12}$ ，

由可行解區域及平行線法知當 $x=20, y=20$ ，即進口甲廠牌汽車 20 台，乙廠牌汽車 20 台時，可獲得最大淨利潤 $20\times 11+20\times 12=460$ (萬元)。