分科測驗（114 學年度起適用）

數學乙考科參考試卷（卷一）

試題解析

第壹部分、選擇（填）題

試題編號：1

參考答案：(4)

學科內容：D-12 乙-1 離散型隨機變數、D-12 乙-2 二項分布

測驗目標：隨機變數的期望值

試題解析：根據題意，出現 1 點、6 點的機率均為 $\dfrac{1-4\times(\frac{1}{12})}{2}=\dfrac{1}{3}$，推得題意所求為 $120\times\dfrac{1}{3}=40$。

試題編號：2

參考答案：(5)

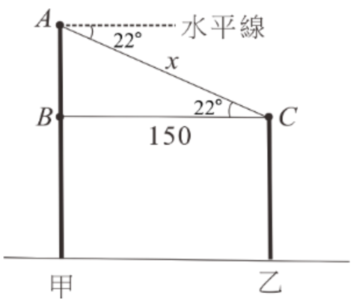
學科內容：G-10-7 三角比的性質

測驗目標：利用三角比的觀念解三角測量問題

試題解析：1.由甲塔頂 A 測得乙塔頂 C 的俯角為 22°，可知水平線與 $\overline{AC}$ 的夾角為 22°。

2.由甲、乙兩塔的水平距離為 150，可知圖中 $\overline{BC}=150$，且由 1.知 $\angle ACB=22^\circ$。

3.設繩索 $\overline{AC}$ 的長度為 x，可知 $\cos 22^\circ=\dfrac{150}{x}$，故 $x=\dfrac{150}{\cos 22^\circ}$。



試題編號：3

參考答案：(4)

學科內容：S-11B-1（S-11A-1）空間概念

測驗目標：空間中多面體的性質

試題解析：長方體有六個面，八個頂點；截去八個角後，除原有的六個面之外，新增了八個截面，故形成十四面體。

試題編號：4

參考答案：(1)

學科內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：有系統的計數

試題解析：根據題意，可分成以下 3 種情況討論：

1.甲、乙都在 A 組，此時有 $C_1^6\times C_3^5\times C_2^2=60$ 種分組方式。

2.甲、乙都在 B 組，此時有 $C_3^6\times C_1^3\times C_2^2=60$ 種分組方式。

3.甲、乙都在 C 組，此時有 $C_3^6\times C_3^3=20$ 種分組方式。

以上共 140 種分組方式。

試題編號：5

參考答案：(3)

學科內容：G-11B-1（G-11A-1）平面向量、G-11B-2（G-11A-6）平面向量的運算

測驗目標：平面向量的線性組合與內積運算

試題解析：由 A、B、D 共線，以及 $3\overline{AD}=8\overline{BD}$，以及 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，可推得 $3\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{BD}$，

$3(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=8(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})$，推得 $\overrightarrow{OD}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OB}$。

【解法一】

因為 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$，

故 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=(\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB})\cdot(\frac{-3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OB})=\frac{-9}{25}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{16}{25}|\overrightarrow{OB}|^2=0$，

得 $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\frac{3}{4}$。

【解法二】

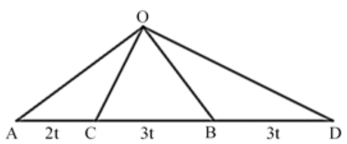
因為 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$，設 $O(0,0)$、$A(a,0)$ 以及 $B(0,b)$，

可得 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}=(\frac{3a}{5},\frac{2b}{5})$，以及 $\overrightarrow{OD}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{8}{5}\overrightarrow{OB}=(\frac{-3a}{5},\frac{8b}{5})$。

由 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{-9a^2}{25}+\frac{16b^2}{25}=0$，得 $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{|b|}{|a|}=\frac{3}{4}$。

【解法三】

利用 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$，$3\overline{AD}=8\overline{BD}$。可得 $\overline{AC}:\overline{CB}:\overline{BD}=2:3:3$，因為 ΔCOD 為直角三角形，且 B 為 ΔCOD 之斜邊 $\overline{CD}$ 中點，故 B 為 ΔCOD 的外接圓圓心，推得 $\overline{BO}=\overline{BC}=\overline{BD}=3t$，$t>0$。由 ΔAOB 為直角三角形，得 $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{3t}{4t}=\frac{3}{4}$。



試題編號：6

參考答案：(2)(4)

學科內容：N-10-6 數列、級數與遞迴關係、N-12 乙-2 無窮等比級數

測驗目標：觀察規律，評量等比數列、無窮等比級數和

試題解析：奇數項一般式為 $a_{2n-1}=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{(2n-1)-1}{2}}=3^{2-n}, n=1,2,3\cdots$;

偶數項一般式為 $a_{2n}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(2n)-2}{2}}=2^{2-n}, n=1,2,3\cdots$

選項(1)： $a_4=1$、 $a_5=\frac{1}{3}$、 $a_6=\frac{1}{2}$、 $a_7=\frac{1}{9}$，故 $a_4>a_6>a_5>a_7$。

選項(2)： $\frac{a_{10}}{a_{11}}=\frac{2^{-3}}{3^{-4}}=\frac{3^4}{2^3}=\frac{81}{8}>10$。

選項(3)：

【解法一】 $\sum_{n=1}^{50}a_{2n}<\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=a_2+a_4+a_6+\cdots=2+1+\frac{1}{2}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$。

【解法二】 $\sum_{n=1}^{50}a_{2n}=a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+2^{-48}$

$$=\frac{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\right]}{1-\frac{1}{2}}=4-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{50}<4$$ 。

選項(4)：由奇數項一般式 $a_{2n-1}=3^{2-n}$，及 $3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}>\frac{1}{100}, 3^{-5}=\frac{1}{3^5}=\frac{1}{243}<\frac{1}{100}$，可知 $a_{2\times7-1}=a_{13}$ 滿足 $a_{13}<\frac{1}{100}$。同理由偶數項一般式 $a_{2n}=2^{2-n}$，可知 $a_{2\times9}=a_{18}$ 滿足 $a_{18}<\frac{1}{100}$。故滿足 $a_n<\frac{1}{100}$ 的最小正整數 n 是 13。

選項(5)：由 $b_n=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}=\frac{3^{2-n}}{2^{2-n}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{9}{2}$

試題編號：7

參考答案：(2)(4)

學科內容：D-10-4 複合事件的古典機率、

D-11B-2 不確定性（D-11A-2 條件機率、D- 11A-3 貝氏定理）

測驗目標：機率的定義、條件機率

試題解析：根據題意，以原點為起點，第一次若擲出 1、3、5 點，坐標分別為 0、 –2 、 –4 ；若擲出 2、4、6 點，坐標則分別為 1、2、3。

選項(1)：投擲骰子一次，棋子與原點距離為 2，則需擲出 3 點或 4 點，其機率為 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 。

選項(2)：期望值為 $\frac{1}{6}\times\left(0+1+(-2)+2+(-4)+3\right)=\frac{6-6}{6}=0$ 。

選項(3)：若要擲二次後抵達 –5 ，最有可能是擲出 3 點或 5 點。但擲出 3 點或 5 點，皆無法配出棋子坐標為 –5 。

選項(4)：投擲骰子二次，二次點數皆大於 3 的情形有 $3\times3=9$ 種。二次點數皆大於 3 且棋子坐標為負，則兩次投擲中必定至少一次擲出 5，有 5 種情形。推得題意所求機率為 $\frac{5}{9}$ 。亦可列舉兩次點數大於 3 的情形求解。

選項(5)：投擲骰子三次，棋子會在原點，除了擲出 3 次 1 點外，還有其他可能，例如：擲出 1、3、4 點，故機率必大於 $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ 。

試題編號：8

參考答案：(1)(4)

學科內容：F-10-1 一次與二次函數、F-10-2 三次函數的圖形特徵、F-12 乙-4 導函數

測驗目標：二次多項式函數圖形的性質、函數的導函數

試題解析：$f(x)=0$ 沒有實根表示二次函數 $f(x)$ 的圖形都在 x 軸上方或下方。

選項(1)：當 $f(1)>0$ 時， $f(x)$ 的圖形都在 x 軸上方，推得 $f(1)f(2)>0$ ；當 $f(1)<0$ 時，$f(x)$ 的圖形都在 x 軸下方，推得 $f(1)f(2)>0$ 。

選項(2)：例如 $f(x)=-x^2-2$ ，則 $f(x)=-2$ 有實根，但 $f(x)=1$ 沒有實根。

選項(3)：例如 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}$ ，則 $f(x)=2$ 有實根，且 $f(x)=1$ 有實根。

選項(4)：當 $f(0)>0$ 時，圖形凹口向上，故 $f''(0)>0$，得 $f(0)f''(0)>0$ ；同理當 $f(0)<0$ 時，圖形凹口向下，故 $f''(0)<0$，得 $f(0)f''(0)>0$ 。一般而言，對任意實數 r，$f(r)f''(r)>0$ 均成立。

選項(5)：當 $f(3)=f(1)$ 時，得 $\left(f(3)-f(1)\right)f'(2)=0$ ；當 $f(3)>f(1)$ 時，若函數 $f(x)$ 的圖形都在 x 軸上方，則點 $(2,f(2))$ 必在極小值發生點的右側，故 $f'(2)>0$；若函數 $f(x)$ 的圖形都在 x 軸下方，則點 $(2,f(2))$ 必在極大值發生點的左側，故 $f'(2)>0$，得 $\left(f(3)-f(1)\right)f'(2)>0$。同理可得當 $f(3)<f(1)$ 時，$\left(f(3)-f(1)\right)f'(2)>0$。此題也可令 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，則 $\left(f(3)-f(1)\right)f'(2)=[(9a+3b+c)-(a+b+c)]\times(4a+b)=2(4a+b)^2\geq 0$ 。

試題編號：9

參考答案：(1)(2)(4)

學科內容：D-10-2 數據分析

測驗目標：一維數據經線性平移後關於平均數、標準差的前後關係

試題解析：選項(1)： $y_1-x_1=(0.8x_1+20)-x_1=20-0.2x_1=0.2(100-x_1)\geq 0$ 。

選項(2)：令甲、乙兩班的原始平均分數為 μ_{x_1} 、 μ_{x_2} ，依據題意可得 $60=0.8\mu_{x_1}+20$ 、$60=0.75\mu_{x_2}+25$ ，推得 $\mu_{x_1}=50$ 、 $\mu_{x_2}=\dfrac{140}{3}$ 。

選項(3)：令甲、乙兩班的原始分數標準差為 σ_{x_1} 、 σ_{x_2} ，依據題意可得 $16=0.8\sigma_{x_1}$ 、$15=0.75\sigma_{x_2}$ ，推得 $\sigma_{x_1}=20$ 、 $\sigma_{x_2}=20$ 。

選項(4)： $y_1-y_2=(0.8x_1+20)-(0.75x_2+25)=0.75(x_1-x_2)+0.05(x_1-100)>0$ ，已知 $x_1-100\leq 0$ ，得 $x_1-x_2>0$ 。

選項(5)：由選項(2)可知，當甲班同學原始分數小於 50 分，乙班同學原始分數小於 $46\dfrac{2}{3}$ 分時，其調整分數會小於 60 分。但由題意無法得知各班原始分數的分布情形。以下舉例說明：

甲班：調整後分數由小到大排序為 44 分有 20 人、76 分有 20 人，因此甲班調整後分數不及格的人數有 20 人，且可由選項(2)推得甲班原始分數不及格的人數為 20 人。

乙班：調整後分數由小到大排序為 30 分有 1 人、45 分有 16 人、60 分有 6 人、75 分有 16 人、90 分有 1 人，因此乙班調整後分數不及格的人數有 17 人，且可由選項(2)推得乙班原始分數不及格的人數有 23 人。

試題編號：10

參考答案：10

學科內容：A-11B-1 矩陣與資料表格（A-11A-1 二元一次方程組的矩陣表達、A-11A-3 矩陣的運算）

測驗目標：矩陣之加、減、乘法

試題解析： $A^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2I$ ，得 $A^6=A^2A^2A^2=(2I)(2I)(2I)=8I$ 。

$A^6-3A=8I-3A=\begin{bmatrix}8&0\\0&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&3\\3&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-3\\-3&11\end{bmatrix}$ ，故 $a+b+c+d=10$ 。

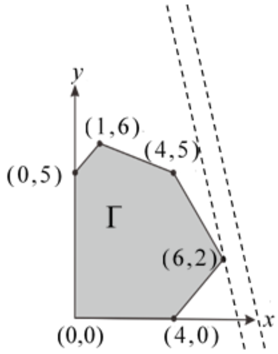
試題編號：11

參考答案：46

學科內容：G-10-2 直線方程式、A-12 乙-1 線性規劃

測驗目標：由可行解區域尋找目標函數的最佳解

試題解析：直線 $7x+2y=k$ 斜率為 $-\frac{7}{2}$ ，較頂點(4,5)、(6,2)所決定直線之斜率 $\frac{5-2}{4-6}=-\frac{3}{2}$ 小，由平行線法可知，當直線 $7x+2y=k$ 過(6,2)時，即 $k=7\times6+2\times2=46$ ，為題意所求 k 的最小值。



試題編號：12

參考答案：$4\sqrt{2}$

學科內容：G-10-2 直線方程式、G-10-4 直線與圓

測驗目標：圓與直線的關係、兩平行線的距離

試題解析：已知圓與直線 $x+y=0$ 交於 A、B 兩點且 $\overline{AB}=8$。過圓心 O 點作兩平行線 $x+y=0$ 、 $x+y=24$ 的垂直線，設分別交兩平行線於 C、D 兩點。則 $\overline{OA}=12$ ， $\overline{AC}=4$

$\Rightarrow \overline{OC}=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$ ，兩平行線 $x+y=0$ 、 $x+y=24$ 的距離

$\overline{CD}=\frac{|24-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=12\sqrt{2}$ ，故 $\overline{OD}=\overline{CD}-\overline{OC}=12\sqrt{2}-8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

<u>13-15 題為題組</u>

試題編號：13

參考答案：如解析

學科內容：F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：對數律

試題解析：由對數律知 $\log P_n=\log a(1+r)^n=\log a+n\log(1+r)$ ，

因此 $A=\frac{\log P_5-\log P_2}{3}=\frac{\log a+5\log(1+r)-\log a-2\log(1+r)}{3}=\log(1+r)$ ，

$B=\frac{\log P_8-\log P_6}{2}=\frac{\log a+8\log(1+r)-\log a-6\log(1+r)}{2}=\log(1+r)$ 。

所以 $A=B=\log(1+r)$ 。

試題編號：14

參考答案：(1)

學科內容：F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：指數律、指數函數模型

試題解析：根據題意，已知該傳染病每隔 16 天總感染人數會增加為 10 倍，可知$10=\dfrac{P_{n+16}}{P_n}=(1+r)^{16}$

則每隔 2 天總感染人數會增加為原來的$\dfrac{P_{n+2}}{P_n}=(1+r)^2=\left[(1+r)^{16}\right]^{\frac{1}{8}}=10^{\frac{1}{8}}$倍。

試題編號：15

參考答案：$\dfrac{15}{16}$

學科內容：F-11B-2 按比例成長模型（A-11A-4 對數律、F-11A-4 指數與對數函數）

測驗目標：指數律、指數函數模型

試題解析：$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{P_{2k-1}}{P_{2k}}=\frac{P_1}{P_2}+\frac{P_3}{P_4}+\cdots+\frac{P_{19}}{P_{20}}=\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+r}+\cdots+\frac{1}{1+r}=\frac{10}{1+r}$ 。

又承 14 可知$10=(1+r)^{16}$，推得$1+r=\pm 10^{\frac{1}{16}}$，因為$r>0$，所以$1+r=10^{\frac{1}{16}}$。

因此$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{P_{2k-1}}{P_{2k}}=\frac{10}{1+r}=10^{\frac{15}{16}}$，即$t=\dfrac{15}{16}$。

<u>16-18 題為題組</u>

試題編號：16

參考答案：(5)

學科內容：A-12 乙-2 方程式的虛根

測驗目標：實係數方程式虛根成對

試題解析：已知$f(2-i)=0$，由實係數方程式虛根成對定理，知$f(2+i)=0$。

因此$2+i$是方程式$f(x)=0$的根。

試題編號：17

參考答案：$a=1,b=-2,c=-3,d=10$

學科內容：A-10-2 多項式之除法原理、A-12 乙-2 方程式的虛根

測驗目標：實係數方程式虛根成對、多項式之除法原理

試題解析：由$f(2-i)=f(2+i)=0$，可知$f(x)$有因式$(x-(2+i))(x-(2-i))$。設

$f(x)=(Ax+B)(x-(2+i))(x-(2-i))=(Ax+B)(x^2-4x+5)$，由$f(0)=5B=10$，

$f(1)=(A+B)(1-4+5)=6$，可解出$A=1,B=2$。

故$f(x)=(x+2)(x^2-4x+5)=x^3-2x^2-3x+10$，得$a=1,b=-2,c=-3,d=10$。

試題編號：18

參考答案：$\dfrac{125}{24}$

學科內容：F-12 乙-3 微分、F-12 乙-5 積分

測驗目標：多項式函數的微積分

試題解析：$f(x)=x^3-2x^2-3x+10$，$f'(x)=3x^2-4x-3$，以 $(0,10)$ 為切點的切線 L，其斜率為 $f'(0)=-3$，因此 L 的方程式為 $y-10=-3(x-0)$，即 $3x+y=10$。解 $3x+y=10$ 與 $y=2x^2-8x+10$，得 $2x^2-5x=0 \Rightarrow x=0,\dfrac{5}{2}$。因此 L 與 $y=2x^2-8x+10$ 有兩交點，x 坐標分別為 $0,\dfrac{5}{2}$，由 $y=2x^2-8x+10$ 的開口朝上，題意所求封閉區域的面積：

$$\int_0^{\frac{5}{2}}\left[(-3x+10)-(2x^2-8x+10)\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{5}{2}}(-2x^2+5x)dx$$

$$=\left(-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{5}{2}}=-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{125}{24}$$ 。